المستوى: 3 ع ت+3ت ر+3 ر

دراسة حركة قذيفة

BAC 2020 — BAC 2020

ملاحظات للتلاميذ:

1ـ زاوية القذف هي الزاوية المحصورة بين حامل شعاع السرعة الابتدائي $\overrightarrow{v_0}$ و حامل المحور الأفقي (Ox) .

2ـ بعد إسقاط شعاع السرعة الابتدائي $\overrightarrow{v_0}$ أو شعاع قوة $\overrightarrow{F}$ ما وفق محور معين نأخذ القيم الجبرية .

3ـ الارتفاع الابتدائي y_0 هو المسافة الشاقولية المحصورة بين مبدأ الاحداثيات للمعلم ونقطة القذف ، إذا كان القذف من مبدأ الاحداثيات للمعلم يكون: $y_0 = 0$.

4ـ حركة القذيفة تتعلق بشرطين هما: قيس زاوية القذف وقيمة السرعة الابتدائية $\overrightarrow{v_0}$.

5 ـ علاقة المشتقة بالنسبة للزمن في المستوي الشاقولي (Oxy) : $\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}$.

ـ ندرس حركة القذيفة في المستوي الشاقولي (Oxy) ، ويهمل تأثير الهواء على القذيفة في كل الحالات حيث:

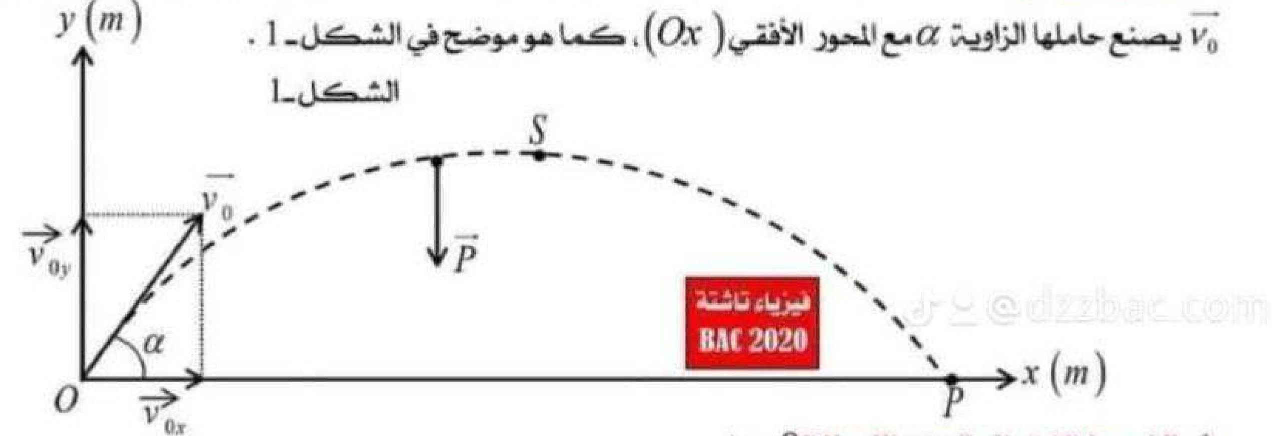
ـ **الجملة المدروسة** : القذيفة (الجسم).

ـ **المرجع الغاليلي المناسب**: المرجع السطحي الأرضي .

ـ **القوى الخارجية المؤثرة على القذيفة** : قوة الثقل $\overrightarrow{P}$.

I ـ القذف المائل للأعلى:

01 ـ **الحالة الاولى**: عند اللحظة $t = 0$ نقذف جسما نعتبره نقطيا كتلته m من مبدأ الإحداثيات O بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{v_0}$ يصنع حاملها الزاوية α مع المحور الأفقي (Ox)، كما هو موضح في الشكل ـ 1 .



الشكل ـ 1

1 ـ **الشروط الابتدائية عند اللحظة** $t = 0$:

أ ـ تم القذف من الموضع O أي : $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$.

ب ـ مركبتي شعاع السرعة الابتدائي $\overrightarrow{v_0}$:

حيث: $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} \\ v_{0y} \end{cases}$ ، $\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{v_{0x}}{v_0} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{v_{0y}}{v_0} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$ وعليه: $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$

نجد: $\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt - v_0\sin(\alpha) \end{cases}$

ـ بالنسبة لـ $x(t)$ و $y(t)$:

لدينا: $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0\cos(\alpha) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -gt - v_0\sin(\alpha) \end{cases}$ بمكاملة طرفي العبارتين بالنسبة للزمن واستغلال الشروط الابتدائية

نجد: $\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)\mathrm{t} ....(1) \\ \mathrm{y}(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 - v_0\sin(\alpha)\mathrm{t} + \mathrm{h} ....(2) \end{cases}$

د ـ معادلة المسار $y = f(x)$:

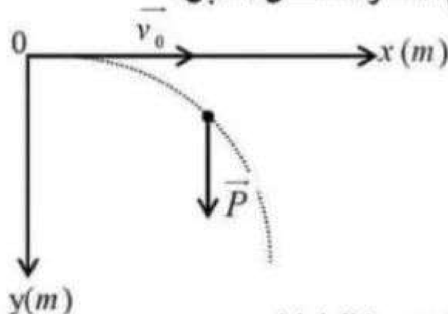
من المعادلة (1) نجد: $\mathrm{t} = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$

وبالتعويض في المعادلة (2) من نجد: $y(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 - \tan(\alpha)x + h$

III ـ القذف الأفقي:

يعني أن زاوية القذف المحصورة بين حامل شعاع السرعة الابتدائي $\overrightarrow{v}_0$ و المحور الأفقي (Ox) هي: $\alpha = 0$.

01 ـ **الحالة الأولى**: القذف يكون من مبدأ الاحداثيات O للمعلم $(\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{Oy})$. أنظر الشكل المقابل.



1 ـ الشروط الابتدائية عند اللحظة $t = 0$:

أ ـ $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$.

ب ـ مركبتي شعاع السرعة الابتدائي $\overrightarrow{v}_0$: $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

2 ـ أ ـ مركبتي شعاع التسارع $\vec{a}$:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نجد:

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$ ومنه: $\overrightarrow{P} = m\vec{a}$.

بالاسقاط وفق المحور الأفقي (Ox) والمحور الشاقولي (Oy) نجد:

$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = P = mg \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$ حيث: $m \neq 0$: $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$

ب ـ المعادلتين التفاضليتين للحركة: $\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = g \end{cases}$.

جـ ـ المعادلات الزمنية للحركة:

ـ بالنسبة لـ $v_x(t)$ و $v_y(t)$: بمكاملة طرفي العبارتين السابقتين بالنسبة للزمن واستغلال الشروط الابتدائية نجد:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

ـ بالنسبة لـ $x(t)$ و $y(t)$: لدينا:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0\cos(\alpha) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

بمكاملة طرفي العبارتين بالنسبة للزمن

واستغلال الشروط الابتدائية نجد:

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\,t \ldots.(2) \end{cases}$$

د ـ معادلة المسار $y = f(x)$: من المعادلة (1) نجد: $t = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$

وبالتعويض في المعادلة (2) من نجد: $y(x) = \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x$

أي: $y(x) = \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$

02 **ـ الحالة الثانية:** نقذف الجسم السابق من ارتفاع h عن مبدأ الاحداثيات للأسفل بزاوية α .

1 **ـ الشروط الابتدائية عند اللحظة** $t = 0$:

أ ـ $x_0 = 0$ و $y_0 = h$.

ب ـ مركبتي شعاع السرعة الابتدائي $\vec{v}_0$: $\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos(\alpha) \\ v_{0y} = -v_0\sin(\alpha) \end{cases}$

2 **ـ أ ـ مركبتي شعاع التسارع** $\vec{a}$:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نجد:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ ومنه: $\vec{P} = m\vec{a}$.

بالاسقاط وفق المحور الأفقي (Ox) والمحور الشاقولي (Oy) نجد:

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -P = -mg \end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$ حيث: $m \neq 0$ أي: $$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

ب ـ المعادلتين التفاضليتين للحركة:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}.$$

جـ ـ المعادلات الزمنية للحركة:

ـ بالنسبة لـ $v_x(t)$ و $v_y(t)$: بمكاملة طرفي العبارتين السابقتين بالنسبة للزمن واستغلال الشروط الابتدائية

5ـ الدراسة الطاقوية:

أـ العبارة الزمنية للطاقة الحركية $E_C(t)$ للقذيفة:

نعلم أن: $E_C(t)=\frac{1}{2}mv(t)^2$ ونعلم أن: $v^2(t)=v_x^2(t)+v_y^2(t)$

ومنه: $E_C(t)=\frac{1}{2}m\left(v_x^2(t)+v_y^2(t)\right)$.

ولدينا مما سبق: $\begin{cases} v_x(t)=v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t)=-gt+v_0\sin(\alpha) \end{cases}$

ومنه: $E_C(t)=\frac{1}{2}m\left(v_0^2\cos^2(\alpha)+\left(-gt+v_0\sin(\alpha)\right)^2\right)$

ومنه: $E_C(t)=\frac{1}{2}m\left(v_0^2\cos^2(\alpha)+g^2t^2-2gv_0\sin(\alpha)t+v_0^2\sin^2(\alpha)\right)$.

ومنه: $E_C(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2-mgv_0\sin(\alpha)t+\frac{1}{2}m\left(v_0^2\cos^2(\alpha)+v_0^2\sin^2(\alpha)\right)$

ونعلم أن: $v_0^2=v_{0x}^2+v_{0y}^2=v_0^2\cos^2(\alpha)+v_0^2\sin^2(\alpha)$

أي: $E_C(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2-mgv_0\sin(\alpha)t+\frac{1}{2}mv_0^2$

ونعلم أيضا: $E_{C0}=\frac{1}{2}mv_0^2$.

إذن: $E_C(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2-mgv_0\sin(\alpha)t+E_{C_0}$.

ب ـ العبارة الزمنية للطاقة الكامنة الثقالية $E_{PP}(t)$ للجملة (قذيفة + أرض):

نعلم أن: $E_{PP}(t)=mgh(t)=mgy(t)$

ولدينا مما سبق: $y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin(\alpha)t$

ومنه: $E_{PP}(t)=mg\left(-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin(\alpha)t\right)$

أي: $E_{PP}(t)=-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0\sin(\alpha)t$

جـ ـ العبارة الزمنية للطاقة الكلية $E(t)$ للقذيفة:

نعلم أن: $E(t)=E_C(t)+E_{PP}(t)$

ومنه: $E(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2-mgv_0\sin(\alpha)t+E_{C_0}-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0\sin(\alpha)t$

أي: $E(t)=E_{C_0}=\frac{1}{2}mv_0^2$

جـ - المعادلات الزمنية للحركة:

- بالنسبة لـ $v_x(t)$ و $v_y(t)$: بمكاملة طرفي العبارتين السابقتين بالنسبة للزمن واستغلال الشروط الابتدائية

نجد : $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = gt \end{cases}$

فيزياء تاشتة
BAC 2020

- بالنسبة لـ $x(t)$ و $y(t)$:

لدينا: $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0 \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = gt \end{cases}$ بمكاملة طرفي العبارتين بالنسبة للزمن واستغلال الشروط الابتدائية

نجد : $\begin{cases} x(t) = v_0 \, t ......(1) \\ y(t) = \dfrac{1}{2} g t^2 ....(2) \end{cases}$

د - معادلة المسار $y = f(x)$: من المعادلة (1) نجد: $t = \dfrac{x}{v_0}$

وبالتعويض في المعادلة (2) من نجد: $y(x) = \dfrac{g}{2v_0^2} x^2$

02 **- الحالة الثانية** : القذف يكون من ارتفاع h عن مبدأ الاحداثيات O للمعلم $(\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{Oy})$. أنظر الشكل .

y(m)
h
$\overrightarrow{v_0}$
$\overrightarrow{P}$
0
x (m)

1 - الشروط الابتدائية عند اللحظة $t = 0$:

أ- $x_0 = 0$ و $y_0 = h$.

ب- مركبتي شعاع السرعة الابتدائي $\overrightarrow{v_0}$: $\overrightarrow{v_0} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$



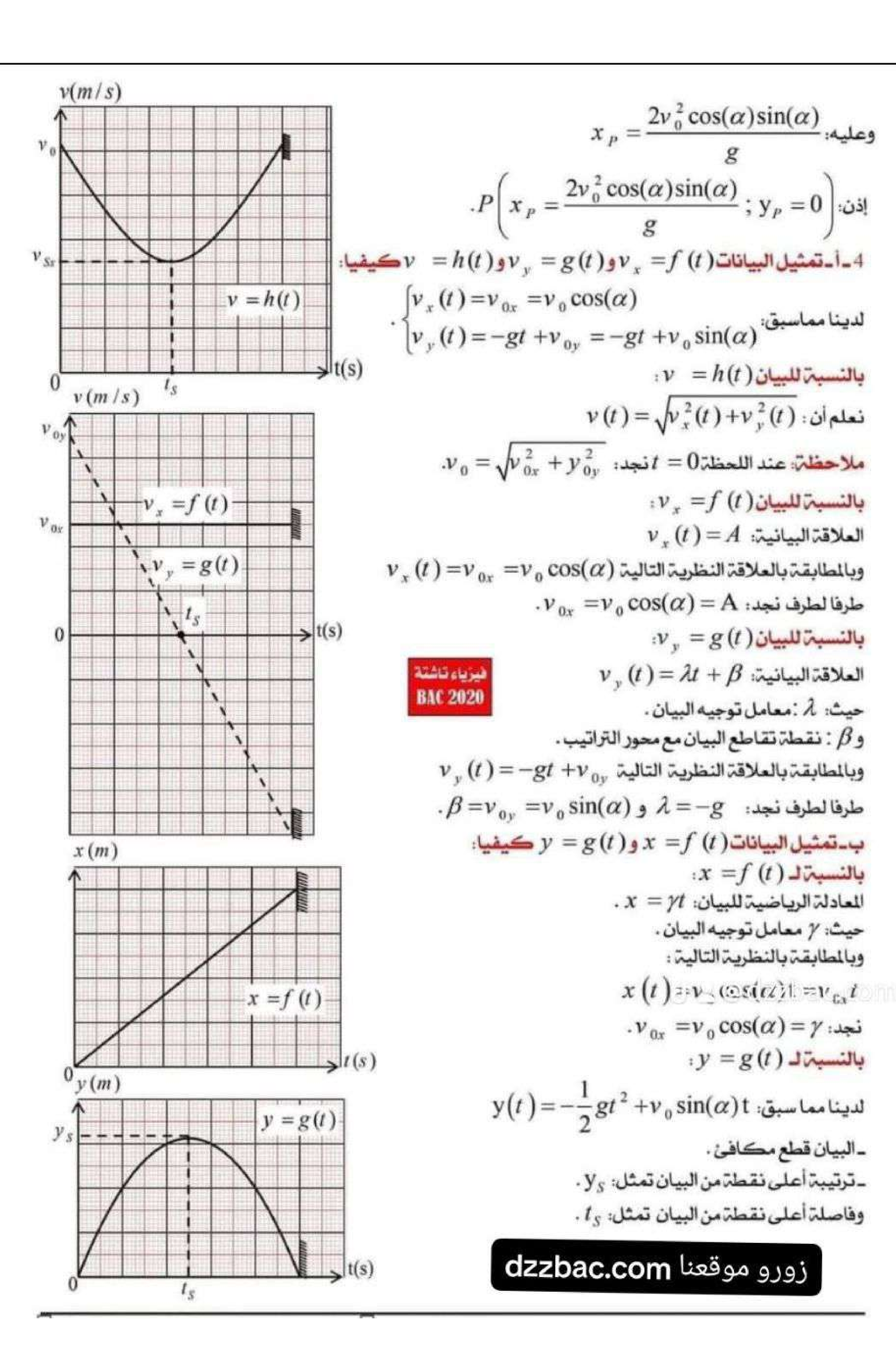
2 - أ- مركبتي شعاع التسارع $\vec{a}$:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نجد: $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$ ومنه: $\overrightarrow{P} = m\vec{a}$.

بالاسقاط وفق المحور الأفقي (Ox) والمحور الشاقولي (Oy) نجد:

$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -P = -mg \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$ حيث: $m \neq 0$ نجد: $\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

ب- المعادلتين التفاضليتين للحركة: $\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}$.



وعليه: $x_P = \dfrac{2v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}$

إذن: $P\left(x_P = \dfrac{2v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}\ ;\ y_P = 0\right)$.

4 ـ أ ـ تمثيل البيانات $v_x = f(t)$ و $v_y = g(t)$ و $v = h(t)$ كيفيا:

لدينا مماسبق: $\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_{0y} = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$.

بالنسبة للبيان $v = h(t)$:

نعلم أن: $v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$

ملاحظة: عند اللحظة $t = 0$ نجد: $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + y_{0y}^2}$.

بالنسبة للبيان $v_x = f(t)$:

العلاقة البيانية: $v_x(t) = A$

وبالمطابقة بالعلاقة النظرية التالية $v_x(t) = v_{0x} = v_0\cos(\alpha)$

طرفا لطرف نجد: $v_{0x} = v_0\cos(\alpha) = A$.

بالنسبة للبيان $v_y = g(t)$:

العلاقة البيانية: $v_y(t) = \lambda t + \beta$

حيث: λ: معامل توجيه البيان.

و β: نقطة تقاطع البيان مع محور التراتيب.

وبالمطابقة بالعلاقة النظرية التالية $v_y(t) = -gt + v_{0y}$

طرفا لطرف نجد: $\lambda = -g$ و $\beta = v_{0y} = v_0\sin(\alpha)$.

ب ـ تمثيل البيانات $x = f(t)$ و $y = g(t)$ كيفيا:

بالنسبة لـ $x = f(t)$:

المعادلة الرياضية للبيان: $x = \gamma t$.

حيث: γ معامل توجيه البيان.

وبالمطابقة بالنظرية التالية:

$x(t) = v_0\cos(\alpha)t = v_{0x}t$

نجد: $v_{0x} = v_0\cos(\alpha) = \gamma$.

بالنسبة لـ $y = g(t)$:

لدينا مما سبق: $y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t$

ـ البيان قطع مكافئ.

ـ ترتيبة أعلى نقطة من البيان تمثل: y_S.

وفاصلة أعلى نقطة من البيان تمثل: t_S.

جـ ـ المعادلات الزمنية للحركة:

ـ بالنسبة لـ $v_x(t)$ و $v_y(t)$: بمكاملة طرفي العبارتين السابقتين بالنسبة للزمن واستغلال الشروط الابتدائية

نجد:
$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$

ـ بالنسبة لـ $x(t)$ و $y(t)$:

لدينا:
$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0\cos(\alpha) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$
بمكاملة طرفي العبارتين بالنسبة للزمن واستغلال الشروط الابتدائية

نجد:
$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)\,\mathrm{t}..................(1) \\ \mathrm{y}(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\mathrm{t} + \mathrm{h}....(2) \end{cases}$$

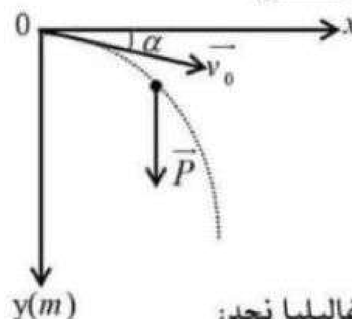
د ـ معادلة المسار $y = f(x)$: من المعادلة (1) نجد: $\mathrm{t} = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$

وبالتعويض في المعادلة (2) من نجد: $y(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x + h$

أي: $y(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x + h$

IIـ القذف المائل للأسفل:

01 ـ الحالة الاولى: نقذف الجسم السابق من مبدأ الاحداثيات للأسفل بزاوية α ، أنظر الشكل .



1 ـ الشروط الابتدائية عند اللحظة $t = 0$:

أ ـ $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$.

ب ـ مركبتي شعاع السرعة الابتدائي $\vec{v_0}$: $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0\sin(\alpha) \end{cases}$

2 ـ أ ـ مركبتي شعاع التسارع $\vec{a}$:

بتطبيق القانون الثاني نيوتن على القذيفة في المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نجد:

$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$ ومنه: $\vec{P} = m\vec{a}$.

وبالاسقاط وفق المحور الأفقي (Ox) والمحور الشاقولي (Oy) نجد:

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = P = mg \end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$ حيث: $m \neq 0$ وعليه: $$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

ب ـ المعادلتين التفاضليتين للحركة:
$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = g \end{cases} .$$

2- أ- مركبتي شعاع التسارع $\vec{a}$:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نجد:

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$ ومنه: $\vec{P} = m\vec{a}$.

بالاسقاط وفق المحور الأفقي (Ox) والمحور الشاقولي (Oy) نجد:

$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -P = -mg \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$ حيث: $m \neq 0$ وعليه: $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

حيث: g تسارع الجاذبية الأرضية.

ب- طبيعة الحركة: حركة منتظمة وفق المحور الأفقي (Ox) ومتغيرة بانتظام وفق المحور الشاقولي (Oy).

جـ- المعادلتين التفاضليتين للحركة:

لدينا: $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$ ونعلم أن: $\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x(t)}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y(t)}{dt} \end{cases}$ ومنه نجد: $\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}$.

د- المعادلات الزمنية للحركة:

فيزياء ناشئة BAC 2020

- بالنسبة لـ $v_x(t)$ و $v_y(t)$:

لدينا: $\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}$ وبمكاملة الطرفين بالنسبة للزمن نجد: $\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -gt + C_2 \end{cases}$.

واعتمادا على الشروط الابتدائية نجد: $\begin{cases} C_1 = v_{0x} = v_0\cos(\alpha) \\ C_2 = v_{0y} = v_0\sin(\alpha) \end{cases}$ أي: $\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$

- بالنسبة لـ $x(t)$ و $y(t)$:

لدينا: $\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$ ونعلم أن: $\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0\cos(\alpha) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases}$

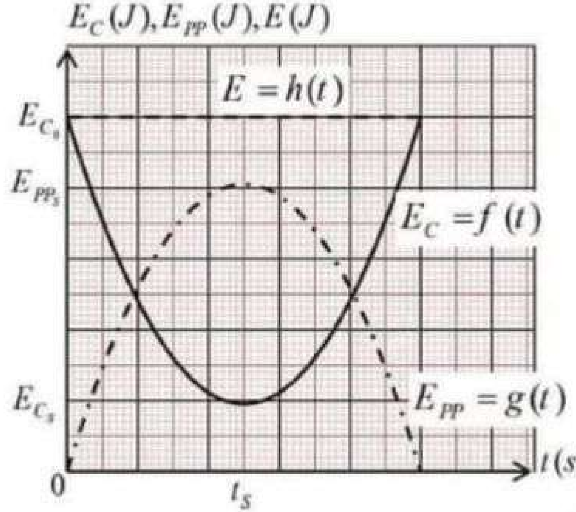
وبمكاملة الطرفين بالنسبة للزمن نجد: $\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t + C_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t + C_4 \end{cases}$.

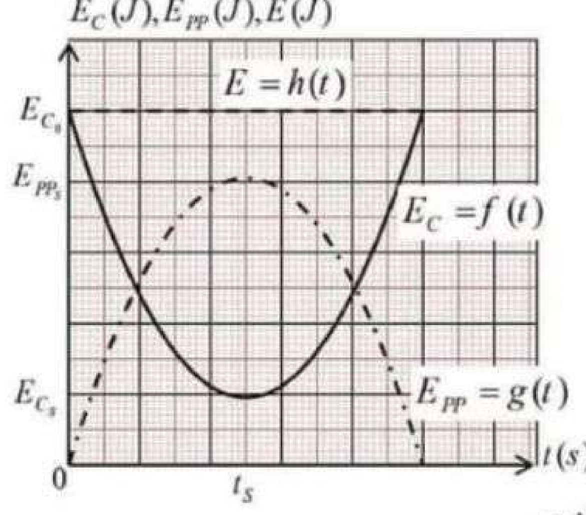
واعتمادا على الشروط الابتدائية نجد: $\begin{cases} C_3 = x_0 = 0 \\ C_4 = y_0 = 0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \text{..................}(1) \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \text{....}(2) \end{cases}$

هـ- معادلة المسار $y = f(x)$:

من المعادلة (1) نجد: $t = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$

د ـ التمثيل البياني للبيانات $E_C = f(t)$ و $E_{PP} = g(t)$ و $E = h(t)$ في معلم واحد:





بالنسبة لـ $E_C = f(t)$:

نعلم أن: $E_C(t) = \frac{1}{2}mg^2t^2 - mgv_0\sin(\alpha)t + E_{C_0}$

ولما $t = 0$ نجد: $E_C(0) = E_{C_0}$

إذن البيان $E_C = f(t)$ يبدأ من القيمة E_{C_0} ثم تتغير قيمته بمرور الزمن.

بالنسبة لـ $E_{PP} = g(t)$:

نعلم أن: $E_{PP}(t) = -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0\sin(\alpha)t$

ولما $t = 0$ نجد: $E_{PP}(0) = 0$

إذن البيان $E_{PP} = g(t)$ يبدأ من مبدأ المعلم ثم تتغير قيمته بمرور الزمن.

بالنسبة لـ $E = h(t)$:

نعلم أن: $E(t) = E_{C_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = Cste$

ولما $t = 0$ نجد: $E(0) = E_{C_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = Cste$

إذن البيان $E = h(t)$ يبدأ من القيمة E_{C_0} ولا تتغير قيمته بمرور الزمن.

02 ـ الحالة الثانية: إذا قذفنا الجسم السابق من ارتفاع h عن مبدأ الإحداثيات O بسرعة ابتدائية $\vec{v_0}$ يصنع حاملها الزاوية α مع المحور الأفقي (Ox)، كما هو موضح في الشكل.

1 ـ الشروط الابتدائية عند اللحظة $t = 0$:

أ ـ $x_0 = 0$ و $y_0 = h$.

ب ـ مركبتي شعاع السرعة الابتدائية $\vec{v_0}$:

$$\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0\sin(\alpha) \end{cases}$$



2 ـ أ ـ مركبتي شعاع التسارع $\vec{a}$:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المرجع السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا نجد:

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ ومنه $\vec{P} = m\vec{a}$.

بالاسقاط وفق المحور الأفقي (Ox) والمحور الشاقولي (Oy) نجد:

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -P = -mg \end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$ حيث: $m \neq 0$ وعليه: $$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

ب ـ المعادلتين التفاضليتين للحركة:

$$\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}.$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نجد: $y(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\sin(\alpha)\times\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}$

ومنه: $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}x$ أي: $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$

بما أن معادلة المسار من الدرجة الثانية $(y = Ax^2 + B)$ فإن حركة القذيفة منحنية في المستوي الشاقولي (Oxy).

3 ـ أ ـ الذروة (S): هي أعلى نقطة تبلغها القذيفة والتي تنعدم عندها مركبة السرعة وفق المحور الشاقولي (Oy).

أي: $v_y(t_S) = 0$ ومنه نجد: $-gt_S + v_0\sin(\alpha) = 0$

إذن عبارة زمن t_S لبلوغ القذيفة للذروة تكتب: $t_S = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g}$.

ـ استنتاج إحداثيتي نقطة الذروة $S(x_S\ ;\ y_s)$:

نعلم أن: $\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{cases}$ ولدينا: $t_S = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g}$

ومنه نجد: $\begin{cases} x_S = v_0\cos(\alpha)\times\frac{v_0\sin(\alpha)}{g} \\ y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin(\alpha)}{g}\right)^2 + v_0\sin(\alpha)\times\frac{v_0\sin(\alpha)}{g} \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} x_S = \frac{v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g} \\ y_S = -\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g} + \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{g} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x_S = \frac{v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g} \\ y_S = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g} \end{cases}$

ونكتب: $S\left(x_S = \frac{v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}\ ;\ y_s = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}\right)$

ب ـ المدى $(OP = x_P)$: هي أكبر مسافة أفقية تقطعها القذيفة وفق المحور الأفقي (Ox).

استنتاج إحداثيتي النقطة $P(x_P\ ;\ y_P)$:

من الشكل ـ 1 نجد: $y_P = 0$.

ومن معادلة المسار: $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_P^2 + \tan(\alpha)x_P = 0$

ومنه: $\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_P + \tan(\alpha)\right)x_P = 0$ أي: $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_P + \tan(\alpha) = 0$